|  |  |
| --- | --- |
|  | **Лекция 6** |
|  | **План лекции.** |
| 1. | **Определение функции** |
| 1.1. | Область определения и область значений функции |
| 1.2. | Образ множества и элемента множества, прообраз множества и элемента |
| множества. | |
| 2. | **Определение отображения** |

1. Свойство отображения.
2. Композиция отображений.
3. Сюръективное и инъективное отображения.
4. Сюръективная и инъективная функция.
5. Биекция или взаимно-однозначное соответствие

**3. Способы задания функций**

1. Табличный
2. Аналитический
3. Графический

4. **Специальные функции**

1. Тождественная функция
2. Нижнее округление
3. Верхнее округление
4. Факториал.
5. Бинарная операция
6. Конечная и бесконечная последовательности

**5**. **Функция двух переменных**

5.1. Матрицы, операции над матрицами

**6**. **Понятие функционала**

**7**. **Понятие оператора**

**Определение функции**

**Функция** — математическое понятие, отражающее связь между элементамимножеств. Можно сказать, что функция — это «закон», по которому каждому элементу одного множества ставится в соответствие некоторый элемент другого множества.

Отображение *f* : *X* *Y* называется **функцией,** если оно однозначно, т. е.

если для любых пар *x*1 , *y*1  *f* и *x*2 , *y* 2  *f* из *x*1  *x*2  следует *y*1  *y*2 . Также значение *y* в любой из пар *x* , *y*  *f* называется функцией от *x* , что

записывается в виде *y*  *f* *x*. Следовательно, функция – это множество

*f* *x* , *y* *X* *Y y*  *f* *x* .Дадим формальное определение функции.



Отношение *f* на *X Y* называется ***функцией*** из *X* в *Y* и обозначается через *f* : *X Y* , если для каждого *x X* существует единственный элемент

*y Y* такой, что *a* , *b f* . Если *f* : *X Y* — функция, и *a* , *b f* , то

говорят, что *y f x* .

Как видно из определения, символ *f* используется в двух смыслах:

1. *f* – это множество, элементами которого являются пары, участвующие всоответствии.
2. *f* *x*– это обозначение для *y* *Y* , которое соответствует данному *x* *X* .

Множество *X* называется ***областью определения*** функции *f* , а множество

*Y* называется***областью потенциальных значений.***

Если *E X* , то множество *f E y f x y* для некоторого *x E* называется ***образом*** множества *E* . Элемент *f x* называется **образом** элемента *x* .



Образ всего множества *X* называется ***областью значений*** функции *f* . Если *F Y* , то множество *f* 1 *F x f x F* называется ***прообразом*** множества F. Элемент *x* называется **прообразом** *f x*



Функция *f* : *X Y* называется также ***отображением***; при этом говорят, что *f* отображает *X* в *Y* *.* Если *x* , *y f* *,* так что *y f x* , то говорят, что элемент *x* отображается в элемент *y* .

**Свойства отображения**

Пусть *A X* . Для произвольного *x A* образом *x* будет множество *QX Y* . Совокупность всех элементов *Y* , являющихся образами *QX* для всех

*x A* , называется образом множества *A* и обозначается *QA*. Тогда согласноэтому определению

*QA QX* .

*x A*

**Свойство 1**. Если*A*1и*A*2– подмножества*X*, то имеет место соотношение:

*Q A*1 *A*2 *Q A*1 *Q A*2.

**Свойство 2**. Для взаимно-однозначного отображения справедливо следующеесоотношение:

*Q A*1 *A*2 *Q A*1 *Q A*2.

**Свойство 3**. Для произвольного отображения справедливо соотношение:

*Q A*1 *A*2 *Q A*1 *Q A*2

**Обобщение свойств** 1 и 3:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *n* |  | *n* |  | *n* |  | *n* |  |
|  |  |  | *QAi* , |  |  |  | *QAi* . |  |
|  |  |  |  |  |
| *Q* | *Ai* | *Q* | *Ai* |  |
|  |  |  | *i* 1 |  |  |  | *i* 1 |  |
| *i* 1 | |  | *i* 1 | |  |  |

**Частный случай**

Важный частный случай, когда множества *X* и *Y* совпадают. Тогда отображение *Q* : *X X* отображает само в себя и определяется парой *X* ,*Q* ,

где *Q X X* или *Q X*2 .

**Композиция отображений**

Пусть даны отображения *Q* : *X X* и *G* : *X X* .

Композицией этих отображений называется отображение *Q G* , определяемое соотношением:

*Q G X Q G X* .

Данное соотношение выражает отображение *Q* отображения *G* .

* случае, когда *Q G* возможно получить отображения:

*QX*2 *Q QX* ,

*QX*3 *Q QX*2и т. д.

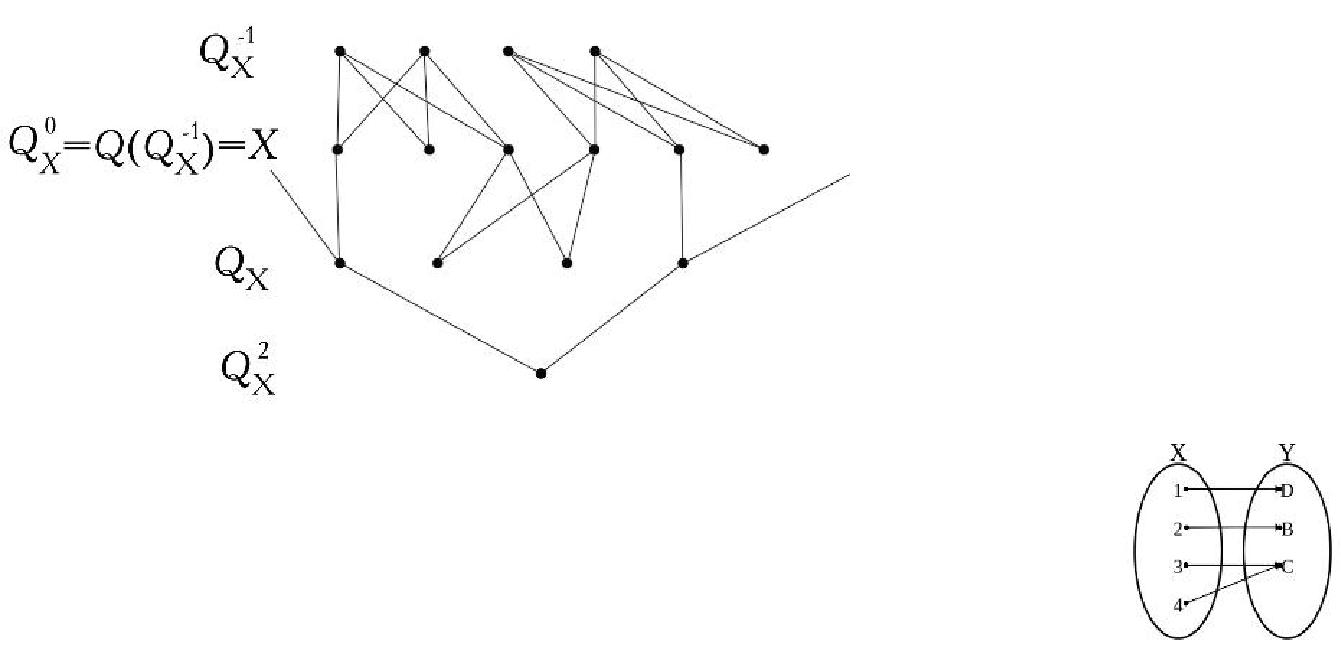
* общем случае при *m* 2 получаем выражение *QXm* *Q QXm* 1 .

Введем соотношение *QX*0 *X* и получим соотношение для отрицательных

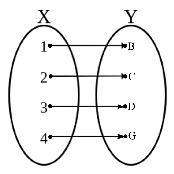
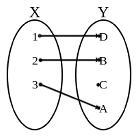
*m* :

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 0 | 1 | *Q Q Q* | | 1 |  | *X* . |  |  |  |
|  |  |  | *QX Q QX* | |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  | *X* | |  |  |  |
| Поскольку *Q* 1 – обратное отображение, то | | | | | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *X* | , |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  | 1 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *QX* | *Q QX* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  | 2 | , и т. д. |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *QX* | *Q QX* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пример. | | Пусть *X* – | | множество | | людей. Для каждого человека *x* из | | | | | |  |
| множества *X* | | множество | | его детей | | определим | | как *QX* . Тогда *QX*2 | | будет | |  |
| представлять множество его внуков, | | | | | 3 | – множество его правнуков, а | | | | 1 | – |  |
| *QX* | *QX* |  |

множество родителей. Изобразив множество людей точками, а стрелками представив соответствия между *X* , *QX* , *QX*2 и т. д., получаем родословную или генеалогическое дерево для данного множества людей.



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Отображение | | множества | *X* в множество | | | | *Y* | называется |
| **сюръективным,** если каждый элемент из*Y* | | | | | | имеет по крайней | | |
| мере один прообраз из *X* . Следовательно, имеет место одно- | | | | | | | | |
| многозначное и много-однозначное соответствия. | | | | | | |  |  |
| Функция | называется ***отображением «на»,*** или ***сюръективной*** | | | | | | | |
| ***функцией***, | или | ***сюръекцией***, | | если для | | каждого *y Y* существует | | |
| некоторое *x X* такое, что *f x* | | | | *y* . | |  |  |  |
| Отображение | | множества | *X* | в | множество | | *Y* | называется |
| **инъективным,** если каждый образ | | | | | *f x* обладает ровно одним | | | |
| прообразом *x* . Следовательно, имеет место одно-однозначное | | | | | | | | |
| соответствие. | |  |  |  |  |  |  |  |
| Функция | *f* : *X Y* называется***инъективной***, или***инъекцией***, если | | | | | | | |
| из *f xf* | *x* следует *x x* . | | |  |  |  |  |  |



Функция, которая является одновременно и инъективной,

* сюръективной, называется ***взаимно-однозначным***

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***соответствием***, или ***биекцией.*** Если | | | | | | | *X Y* | | | и | *f* : *X Y* | | | |
| является взаимно-однозначным соответствием, | | | | | | | | | | | | то *f* | | |
| называется ***перестановкой*** множества *X* . | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
| **Способы задания функций.** | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **1. Табличный способ задания функции** | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
|  | *x* | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |  | 6 |  | 7 | 8 |  | 9 |  |
|  | *f* *x* | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 |  | 36 |  | 49 | 64 |  | 81 |  |

В данной таблице столбцы представляют собой множество упорядоченных пар: *y*  *f* *x* 1,1,2,4,3,9,4,16,5,25,6,36,7,49,8,64,9,81, что

соответствует определению функции, представленному ранее.

**2. Аналитический способ задания функции**

При аналитическом задании функция представлена в виде формулы, т. е. математического выражения, включающего математические операции, которые необходимо выполнить над *x* *X* , чтобы получить *y* *Y* :

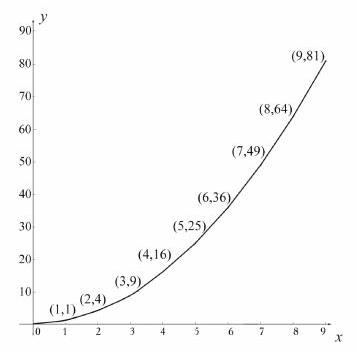
* 1.  *f* *x* *x* , *y* *R* 2 *y*  *x*2.

1. **Графический способ задания функции**



Если *X*  *R* и *Y*  *R* , т. е. *X* и *Y* являются подмножествами множества вещественных чисел, то пары *x* , *y* *R*2 возможно представить в виде точек

на плоскости. Полная совокупность точек будет представлять собой график функции.



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Специальные функции** | | | |  |  |  |
| Пусть *I* : *X X* определено соотношением *f xx* | | | | | для всех *x X* . |  |
| Функция *I* | | называется ***тождественной функцией*** на *X* ***.*** | | |  |  |
| Функция *f* : *X Y* *,* | | | где *X* — множество действительных чисел, а *Y* — | | |  |
| множество | | целых чисел, | называется | ***нижним округлением*** и обозначается | |  |
|  |  | , если она каждому *x X* | | ставит в соответствие наибольшее целое | |  |
| *f x* | *x* |  |
| число, меньшее или равное *x* . | | | |  |  |  |
| Функция | | *f* : *F B* | называется | ***верхним округлением*** | и обозначается |  |
|  |  |  |  | ставит в соответствие наименьшее целое | |  |
| *f x* | *x* , если она каждому *x X* | | |  |

число, большее или равное *x* .

Пусть *А* и *В* совпадают со множеством неотрицательных целых чисел. ***Факториалом*** назовем функцию*f*:*X Y**,*обозначаемую через*f n n*!

и определяемую следующими соотношениями: 0!=1 1!=1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2! 1 2 2 |  |  |  |  |  |
| 3! 1 2 3 6 |  |  |  |  |  |
| 4! 1 2 3 4 24 |  |  |  |  |  |
| *k* ! 1 2 3 ... *k* |  |  |  |  |  |
| **Бинарная операция** |  |  | **Бинарной операцией** |  |  |
| Пусть *X* , *Y* , *Z* — тройка | непустых | множеств. | или |  |
| **двуме́стной опера́цией**в | паре *x* , *y* , | *x* *X* и | *y* *Y* со значением в | *z* *Z* |  |

называется функция *b* : *P*  *Z* , где *P*  *X* *Y* .

Бинарная операция обозначается знаком действия, который ставится обычно между операндами.

Пусть  – произвольная операция. Тогда существуют виды записей:

1. Инфиксная форма записи: *x*  *y*
2. Префиксная (польская запись): *xy*
3. Постфиксная (обратная польская запись): *xy* 

**Пример:** «+», «-», « » – бинарные операции на множестве рациональныхчисел.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Последовательность** |  | *X* *x*1,..., *xi* ,..., *xn*  |  |  |
| **Определение.** Пусть дано | множество | произвольной |  |
| природы. Всякое отображение | *f* : *N*  *X* | множества натуральных чисел *N* в | |  |
| множество *X* называется **последовательностью** (элементов множества *X* ). | | | |  |
| Образ натурального числа *i* , | а именно, | элемент *xi*  *f* *i* , | называется *i* -**м** |  |

**членом** или **элементом последовательности**, а порядковый номер членапоследовательности – её индексом.

**Обозначения**

Последовательность *x*1 , *x*2 ,..., *xi* ,... записывают в виде

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *xi*  |  |  |  | . |  |  |  |  |  |
| *i*1 | , иногда *xi*  | |  |  |  |  |  |
|  |  | *i*1 |  |  |  |  |  |  |
| Для конечных последовательностей: | | | | | | *xi* *n* | или *xi* *n* |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *i*1 | *i*1 |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | *n* |  |  |
| Сумма элементов последовательности: *S*  *xi* | | | | | | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  | *i*1 | |  |  |
| **Функция двух переменных.** | | | | | |  |  |  |  |
| Пусть | | дана | функция | | *f* : *X Y* | в которой значение | | множество *X* |  |
| представлено | | | декартовым | | произведением | | *X A B* . | Такая функция |  |
| называется функцией двух переменных | | | | | | *A* и | *B* и обозначается *f a* , *b* , где | |  |

*a A* и *b B* .

Формальное определение функции двух переменных имеет такой вид:

*f a* , *b*, *y A B Y y f a* , *b* .



**Матрица**

Пусть есть два конечных множества *M* 1,2,...,*m* и *N* 1,2,...,*n* , где *m* и

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* – натуральные числа. | | *m* *n* , или***массивом*** *m* *n* ( *m* на *n* ) |  |
| Назовем | матрицей размера |  |
| функцию: |  | *A* : *M*  *N*  *D* , |  |
|  |  |  |
| где *D* – | это, как правило, | множество действительных, комплексных, |  |
| рациональных или целых чисел. | |  |  |

Элементы *D* называются ***скалярами.***

Таким образом, для каждого *i* , 1 *i*  *m* , и каждого *j* , 1  *j*  *n* , имеется элемент *A* *i* , *j* *D* , который находится в *i* -й строке и *j* -м столбце

соответствующей прямоугольной таблицы.

Образ *A* *i* , *j*  элемента области определения *i* , *j*  сокращенно обозначается через *Ai* , *j* . Следовательно, *m* *n* матрица *A* изображается прямоугольной таблицей, где образы упорядоченных пар *i* , *j* 1,2,...,*m*1,2,...,*n* могут быть представлены в таком виде:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  *A*11 | | *A*12 | *A*13 | *A*1*n* | |  |  |
|  | *A*21 | *A*22 | *A*23 |  | *A*2*n* |  |  |
| *A*  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | *Am* 2 | *Am* 3 |  |  |  |  |
| *Am*1 | | *Amn*  | |  |

Матрица *A* содержит *m* строк и *n* столбцов и является матрицей размера

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *m* *n* . Сокращенно матрицу записывают |  | или |  |  |
| *A* *Aij*  | *A* *aij* . |  |

Значение *aij* называется ***компонентой***, или ***элементом*** матрицы А.

**Виды матриц**

1. ***Матрица-столбец.*** Матрица размера*m*1называется ***матрицей-***

***столбцом или вектором-столбцом.***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *a*11 | |  | *a*1 | |  |  |
|  | *a*2,1 |  |  | *a*2 |  |  |
| *A*  |  |  |  |  |

* 
* *am*1*am* 

2. ***Матрица-строка.*** Матрица размера 1*n* называется ***матрицей-строкой***

***или вектором-строкой.***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *A* *a*11 | *a*12*a*1*n* *a*1 *a*2 | *an*  |
| Если *A* — матрица-строка | или матрица-столбец, | то индекс строки или, |
| соответственно, столбца, обычно опускают. | |  |

3. ***Квадратичная матрица.*** Если в матрице число строк и число столбцов совпадает *m*  *n*  *k* , она называется ***квадратной матрицей.***

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *A*11 | | *A*12 | *A*1*k* | |  |  |
|  | *A*12 | *A*22 |  | *A*2*k* |  |  |
| *A*  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |
|  |  | *Ak* 2 |  |  |  |  |
| *Ak* 1 | | *Akk*  | |  |

4**. Диагональная матрица.** Это квадратичная матрица, в которой все элементы, кроме диагональных, нулевые.

* + *i*  *j*  *A ij* 0. *A*  *diag* *A*1, *A*2,..., *Ak* .

1. **Единичная матрица.** Это диагональная матрица с единичными элементамина диагонали.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *i*  *j* | |  |  *A* |  |  0, | | *A*  *diag* | |  | 1,1,...,1 | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *ij* |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  *j* |  *A ij* 1 | | | |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |
| *i* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | **Операции над матрицами** | | | | |  |  |  |  |
| **Равенство матриц** | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Две матрицы | | | | | *A*  | |  |  | и *B*  | |  |  | *m* *n* ***равны***, если равны их | | | |  |
| *Aij*  | |  | *Bij* размера |  |
| соответствующие элементы; т. е. *A*  *B* тогда и только тогда, когда *Aij* | | | | | | | | | | | | | | |  *Bij* | для |  |
| всех *i* , 1  *j*  *m* *,* и всех | | | | | | | | *j* , 1 *j*  *n .* | | |  |  |  |  |  |  |  |
| **Умножение матрицы на скаляр** | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
| Если | | *d* |  | — скаляр, | | | |  |  |  |  | — матрица | *m* *n ,* то | *dA* есть | матрица | |  |
|  | а *A* *Aij*  | | | |  |
|  |  |  | размера | | | | *m* *n* , | | где |  | *Dij*  *dAij* , т. е. каждая | | | компонента | | есть |  |
| *D* *Dij* | |  |  |  |

произведение соответствующей компоненты *A* на *d* *.* Произведение числа *d* и

матрицы *A* называется ***умножением матрицы на скаляр.***

**Сумма и разность матриц**

*Складывать и вычитать можно только матрицы одного размера !!*

**Сумма**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  | — *m* *n* -матрицы, тогда *A*  *B* есть *m* *n* |  |
| Если *A*  *Aij*  | | и *B* *Bij* |  |  |
|  |  | , где *Cij*  *Aij* | |  *Bij* , другими словами, матрицы складываются |  |
| матрица *C*  *Cij*  | |  |
| покомпонентно. Матрица *C* называется ***суммой матриц*** *A* и *B* ***.*** | | | | |  |

**Разность**

Разность двух матриц определим через их сумму. Запись *A*  *B* означает *A* 1*B* .

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Следовательно, если | | | | | | | *A*  | |  | |  | | и |  | *B* |  |  |  | — |  | *m* *n* -матрицы, тогда *A*  *B* | | | | | | | |  |
| *Aij* | |  | |  | *Bij* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  | |  | , где *Cij* | | | | |  *Aij* | | |  *Bij* **.** | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| есть *m* *n* матрица *C*  *Cij* | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | **Произведение матриц** | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1. **Умножение матрицы на матрицу-столбец** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Матрица должна быть слева, а матрица-столбец - справа: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
|  *A*11 | | *A*12 | *A*1*n* | | |  |  | *B*1 | |  |  |  *A*11 *B*1 | | | |  *A*12 *B*2 | | | ...*A*1*n* *Bn* | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *A*21 | *A*22 |  | *A*2 *n* | |  |  | *B*2 | |  |  |  | *A*21 *B*1 | | |  *A*22 *B*2 | | | ...*A*2*n* *Bn* | | | | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | *A* | *A* |  | *A* | |  |  | *B* |  |  |  |  | *A* | *B* | |  *A* | | *B* ...*A* | | | | *B* |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| *m*1 | *m*1 |  |  | *mn* | *n* | |  |  | *m*1 1 | | |  | *m* 2 2 | | |  | *mn n*  | | | |  |  |  |  |  |
| 2. **Умножение матрицы-строки на матрицу**. | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Матрица-строка должна быть слева, а матрица-справа: | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *B*11 | *B*12 | |  | *B*1*n* | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *B*21 | *B*22 | |  | *B*2*n* | | | | |  |  |  | *m* |  |  |  | *m* |  |  |  |  | *m* |  |  |  |  |  |
| *A*1 *A*2... *Am*  | | |  |  |  |  |  |  |  |  | *Ak Bk* 2 | | | ... *Ak* *Bkn* | | | |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Ak Bk* 1 | | | | |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *k* 1 | | |  |  | *k* 1 |  |  |  |  | *k* 1 | |  |  |  |  |
|  |  |  | *Bm*1 | *Bm*1 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *Bmn*  | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  *A*11 | | |  | *A*12 |  | *A*13 | | *A*1*p* | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *A*22 |  | *A*23 | |  | |  |  |  |  |  |  |  |
| Б) Пусть *A* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *A*21 | | |  |  |  | *A*2 *p*  | |  |  |  |  |
| матрица *m*  *p* : *A*  | | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *A* | |  |  | *A* |  | *A* |  |  | *A* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *m*1 | |  | *m* 2 |  | *m* 3 | |  |  |  | *mp* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B*11 | | |  | *B*12 | *B*13 | |  | *B*1*n*  | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B*22 | *B*23 | |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть *B* матрица *p* *n* : | | | | | | | |  |  | *B*  | | | *B*21 | | |  |  |  | *B*2*n*  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B p* 2 | | *B p* 3 | |  |  | |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B p*1 | | |  |  | *Bpn*  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Тогда произведением матриц *A* и *B* называется матрица *C*  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |  |  | размера |  |
|  | *Cij*  |  |
| *m* *n* , где *Cij* | | | – это скалярное произведение | | | | | | | | | | | | | | | | *i* -й строки матрицы *A* | | | | | | | | | на *j* -й |  |
| столбец матрицы *B* . | | | | | *С=AB* | | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B*1 *j* | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *B*2 *j*  | | |  | *p* |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  | *Ci* , *j* | |  | | *Ai*1 |  | *Ai* 2 | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Aik Bkj* . | |  |  |  |  |
|  |  |  |  | |  |  |  | *Ai* 3*Aip*  | | | | | |  | *B*3 *j*   | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *k* 1 |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *Bpj* | |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Транспонированная матрица** | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть *А* — матрица *m* *n* *.* | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | *At* размера | |  |
| Ее ***транспонированной матрицей*** | | | | | называется | | | | | матрица | |  |
| *n* *m* такая, что |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *At* |  *A* | | | *ji* | , | |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *ij* |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| где *Aij* — элемент *i* -ой строки и *j -* го столбца матрицы | | | | | | | | | | | *A .* |  |  |  |
| **Симметричная матрица** | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Если *A* — матрица *n* *n* и *Aij* | |  *Aji* | |  | для всех 1 *i* , *j*  *n* *,* то матрица | | | | | | | | *A* |  |
| называется ***симметричной.*** Иными словами, матрица *A* | | | | | | | | | | | симметрична | | |  |
| тогда и только тогда, когда *A*  *At* *.* | | |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | **Матричное представление отношения** | | | | | | | | | |  |  |  |  |
| Пусть *A* *a*1 ,*a*2 ,*a*3,...,*am*  и *B* *b*1 ,*b*2 ,*b*3,...,*bn* , и пусть | | | | | | | | | | | *R* – отношение | | |  |
| на *A* *B* ***.*** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| ***Матричным*** | ***представлением*** | *R* | |  |  | называется | | | | матрица | |  |  |  |
|  |  | *M* *M ij*  | |  |
| размера *m* *n* , определенная соотношениями | | | | | | | | | |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  | *a* ,*b* | | | | *j*  | *R*, |  |  |  |  |  |
|  |  | 1, |  |  |  |  |  |
|  | *M ij*  |  |  | *i* |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  | *ai* ,*b* *j* *R*. | | | | | | |  |  |  |  |  |
|  |  | 0, |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| Пусть *M* – | матрица размера | *n* *n ,* | | | | |  | в | каждой | строке и | | в каждом | |  |

столбце которой только один элемент равен 1, а все остальные равны 0. Такая матрица *M* называется ***матрицей перестановок.***

**Понятие о функционала**

Понятие функционала является более широким, чем понятие функции.

Когда мы говорим об отображении *f* : *X Y* как о функции с

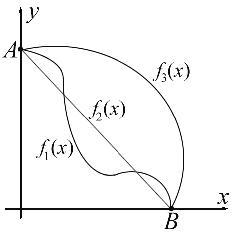
вещественными значениями, мы не накладываем на характер элементов множества *X* каких-либо ограничений. В простейших задачах множество X, как и множество *Y* , представляет собой множества вещественных чисел. Каждая пара

*x* , *y f* ставит в соответствие одному вещественному числу *x* другое

вещественной число *y* . Однако для практики важным является случай, когда

множество *X* представляет собой множество функций, а множество *Y* – множество вещественных чисел. Этот случай приводит к понятию функционала.

Представим себе некоторый набор кривых (траекторий) *y fi* *x* , соединяющих фиксированные точки А и В, как показано на рисунке.



Пусть по каждой из этих траекторий может происходить свободное перемещение точки. Обозначим через *t* время, которое требуется на перемещение из точки *A* в точку *B* . Это время очевидно зависит от характера траектории *AB*,

т. е. от вида функции *fi* *x* .

Обозначим через *F x* множество из *n* различных функций, изображающих траекторию *AB*,

* 1. *x f*1 *x* , *f*2 *x* , ..., *fi x* , ...,*fn x* ,
* через *T* – множество вещественных чисел *t T* , определяющих время перемещения точки, то зависимость времени движения от вида функции может быть записана как отображение.

**Функционал** – это отображение*J*, которое имеет такое формальное

представление:

*J* : *F x T* ,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| или | *J f x* , *t* |  |  |  | . |  |
|  |  |
|  | *f x F x* , *t T* , *t J* | *f x* |  |

**Понятие оператора.** Оператор представляет более общее понятие по сравнению сфункционалом.

Оператором называется отображение

*L* : *X Y* ,

где множества *X* и *Y* являются множествами функций с элементами *x t X* и *y t Y* .

Отсюда следует, что элементами множества *L* являются пары *x t* , *y t* , а

оператор *L* преобразует функцию

*y t L x t* ,

Таким образом, оператор устанавливает соответствие между двумя множествами функций, так, что каждой функции из одного множества соответствует функция из другого множества.

**Пример.** Обозначим через*p*оператор дифференцирования. Тогда связь между

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| производной | *f x* | *df x* | | | | и | функцией *f x* может быть представлена в | |  |
|  | *dx* |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| операторном виде *f x* | | | |  | | *f* |  | . |  |
| *p* | | *x* |  |